混沌、湍流和非平衡统计力学

钱 俭*

【摘要】 为了探索填补非线性系统混沌研究和完全发展湍流研究间的“空白”，笔者提出一个低阶的混沌动力学模型，虽然其相空间维度仅20，但能模拟完全发展湍流的主要特征。湍流是个复杂的大系统，其相空间维度大于10^{10}，精细地研究它的奇异吸引子的几何结构和动力学行为是不可能和没有意义的，必须进行统计研究。湍流统计理论的核心是封闭性问题，根源于N-S方程的非线性。笔者应用非平衡统计力学解决封闭性问题，能成功地处理很多小尺度统计特性问题。

流体湍流运动普遍地存在于自然界和工程应用中，其特征尺度可以小到毫米，大到光年。湍流运动极大地增加了流体中粒子、动量和能量的输运速率。湍流研究具有重要的科学意义和实用价值，是当今科学技术八大前沿学科之一。湍流是极其复杂的大量自由度(10^{10}—10^{20})充分激发的非线性、非平衡和多重尺度问题，是有名的难题。近期内湍流难题得到解决的可能性甚小。然而，鉴于近20年来湍流研究的较快发展，在某些问题或某个方面取得重大突破是完全可能的。

一、具有完全发展湍流特征的混沌动力学模型

自1963年Lorenz的开创性工作以来，非线性动力学系统混沌的研究发展迅速，人们对湍流的产生机理的认识有了突破性的重大进展。不少物理学家把混沌研究称为本世纪物理学思想的第三次革命，前二次革命是相对论和量子理论的研究。基于牛顿力学的经典物理学认为：随机现象与确定性因果律的对立是绝对的和不可调和的。而非线性动力学系统混沌的研究却表明：非线性的确定性因果律可能导致随机现象，两者是可以相容的。

绝大多数混沌研究工作的对象是简单的低维非线性动力学系统，例如Lorenz系统的维度等于3。简单的低维系统的研究是极有价值的，能揭示非线性动力学系统的一般性质，但无法模拟完全发展湍流(相空间维度大于10^{10})的特殊性质。例如下列这些特性：大量自由度充分激发；能量从大尺度向小尺度级串输运(energy cascade)，最后在级串的高波数区被粘性项耗散转化为分子热运动能量；存在一个惯性区，在该波数区内能量级串传输率是一个常数并等于湍流能量耗散率；kolmogorov−5/3律成立。正如不少研究工作者指出的，目前非线性动力学系统混沌研究和完全发展湍流研究之间存在巨大的“空白”或“隔阂”。如何填补这一空白是混沌和湍流研究领域里的一个重要的前沿课题。

非线性动力学系统混纯的研究提供了一种革命性的新观点和新方法，如何应用这一新观点和新方法研究完全发展湍流，目前尚处于探索阶段。为了探索填补混纯研究和完全发展湍流研究间的空白，笔者近几年来进行的研究取得了一些初步结果，提出了一个具有完全发展湍

* 中国科学院研究生院

流特征的混沌动力学模型[1]。虽然该模型的相空间维度仅为 20,但能模拟完全发展湍流的下列主要特征:

1. 运动方程与正规化后的 N–S 方程形式上相同;
2. 基本相互作用过程是非线性三模相互作用,并满足能量细致平衡原理;
3. 具有混沌解和奇异吸引子;
4. 能量从大尺度向小尺度级串输,最后被粘性项耗散;
5. 存在相当宽的惯性区,在该区内能量级串输运率为一常数并等于湍流能量耗散率;
6. Kolmogorov–5/3 律成立,并表示奇异吸引子上混沌轨道的统计性质。

如前所述,完全发展湍流的相空间维度大于 10^{10},是个复杂的大系统,目前尚无法在计算机上进行完全数值模拟;用维度远小于 10^{10} 的低阶动力学系统模拟湍流的主要特征,显得十分必要。即使随着计算机的飞速发展将来可能实现湍流的完全数值模拟,湍流的低阶动力学模型或简化描述仍然是非常有意义的,它将帮助人们分析研究湍流的物理本质。湍流简化描述的物理基础是:湍流内被激发的大量自由度间存在强的非线性关联,混沌运动和有序结构共存。

多年来不少研究工作者曾提出过各种简化模型模拟 N–S 方程的某些基本特征;附表给出其中一些典型的模型,并与笔者的模型进行比较。四十多年前提出的著名的 Burgers 方程是 N–S 方程的一维简化模型,但它的解不是混沌的,Kolmogorov–5/3 律也不成立[2]。Desnyansky 和 Novikov, Kerr 和 Siggia 以及 Gloaguen 等人的模型虽然得到 Kolmogorov–5/3 律,但作为运动方程的定态解,对应相空间中的固定点。湍流是 N–S 方程的混沌解,Kolmogorov–5/3 律应表示奇异吸引子上混沌轨道的统计特性。因而笔者的模型能更好地模拟湍流的动力学特性和统计特性。

附表　Navier–Stokes(N–S)方程简化模型比较(λ_1 是第 1 Lyapunov 指数)

模型的作者(年)	混沌	λ_1	能量级串传输	惯性区	Kolmogorov–5/3 律
Burgers (1948)	无	—	有	有	无
Desnyasky 和 Novikov (1974)	无	—	有	有	对应相空间中的固定点
Orszag (1977)	有	?	无	无	无
Kerr 和 Siggia (1978)	无	—	有	有	对应相空间中的固定点
Gloaguen, Grapping 等人(1986)	无	—	有	有	对应相空间中的固定点
(钱俭) (1988)	有	~20	有	有	表示奇异吸引子上混沌轨道的统计性质

二、湍流封闭性问题和非平衡统计力学

湍流本质上是一种特殊的极其复杂的非线性耗散系统(N–S方程)的混沌，而完全发展湍流对应高雷诺数情况下N–S方程的奇异吸引子上的混沌运动。对于湍流这种复杂的大系统，必须进行统计研究。经典平衡态统计力学中有名的历遍理论(ergodic theory)研究保守系统常能曲面上运动轨道的统计性质，导致微正则系踪这一基本假设.湍流统计理论本质上是非平衡统计力学，对应的近代历遍理论研究非线性耗散系统的混沌和奇异吸引子的统计性质。湍流统计理论的核心问题是封闭性问题，根源于N–S方程的非线性。

当寻求湍流的统计平均性质所满足的方程组时，由于N–S方程的非线性，未知函数的数目永远大于方程的数目，也就是说方程组是不封闭的。例如二阶矩方程中出现三阶矩，而三阶矩方程中出现四阶矩，一般n阶矩方程中出现$(n+1)$阶矩。湍流统计理论的核心问题是如何建立湍流统计平均性质的合理的封闭方程组。这就是有名的湍流封闭性问题。任何解决湍流封闭性问题的方法，称为封闭方法，一定是近似的。但这种近似必须理论上是合理的，应用起来是方便而奏效的。Prandtl的混合长度理论，以及各种模式理论(K–ε, ASM和DSM等)，是经验性或唯象性的封闭方法，虽然理论上存在不少不合理性，但广泛应用于工程计算。

Kraichnan的直接相互作用近似(DIA)封闭方法取得了一定的成功，例如在应用于研究湍流衰减时获得较满意的结果。但DIA遇到发散困难，得到−2／3惯性区能谱，而实验结果支持Kolmogorov−5／3律。后来Kraichnan试图克服DIA的这一严重缺点，发展了多种修正的DIA理论，如ALHDIA和SBALHDIA等，但这些封闭方法数学上很复杂，作了不少人为的假设。修正的DIA的简化形式，如TFM(Test Field Method)，或类似的EDQNM(Eddy–Damped Quasinormal Markovian)近似方法，引入一些可调节参数使理论与实验相符，因而带有半经验性质。一些学者应用重整化群(RNG)方法解决湍流封闭性问题，取得了有意义的结果。RNG方法中一些基本假设过于大胆，值得商榷，小尺度统计性质依赖于大尺度处源项的性质是RNG方法的一个严重缺点，另外RNG方法从仅适用于惯性区的前提出发计算本质上是粘性耗散区的性质。

笔者应用非平衡统计力学方法，通过直接求解刘维方程得到湍流的概率密度函数，解决湍流封闭性问题。这一封闭方法的关键在于选择一个合适的可解算子$\overline{L}^{(0)}$作为不可解刘维算子$\overline{L}$的零级近似。笔者选用含有无限个可调参数的Fokker–Planck算子作为$\overline{L}^{(0)}$，并调节无限个可调参数使$\delta\overline{L}\equiv\overline{L}-\overline{L}^{(0)}$尽可能地小。这一封闭方法能成功地处理很多湍流小尺度运动统计特性的问题；例如：推导Kolmogorov−5／3律和计算Kolmogorov常数，推导普适平衡区能谱和计算其中的普适函数，研究二维湍流涡度拟能传输惯性区和能量反向传输惯性区的谱动力学，计算表示湍流间歇程度的速度场导数的平坦因子，以及分析湍流数量场方差谱等等。长期以来人们积累了大量的湍流小尺度运动统计特性的实验观测资料，它们的分析研究既有重要的学术意义又有很大的实用价值，很多研究工作尚待我们去完成。

与其他的湍流统计理论一样，非平衡统计力学封闭方法应用到湍流大尺度运动时遇到很大的困难。湍流大尺度运动不是各向同性的，是非均匀的，依赖于边界条件，与有序结构密切相关。这里涉及到湍流统计理论的一个根本问题：统计理论适用于研究湍流小尺度运动的统计特性，是否仍然适合于研究湍流大尺度运动？这是一个目前尚没有统一认识的争论点。长

期以来统计方法广泛地应用于研究湍流大尺度运动,最早的应用是雷诺方程和 Prandtl 混合长度理论,主要原因之一是没有其他更好的方法可选用,并不说明统计方法是研究湍流大尺度运动的最合适的方法。笔者认为:非平衡统计力学封闭方法适合于研究湍流小尺度运动统计特性,而对大尺度运动直接进行动力学研究或动力学研究和统计研究相结合较为合适。由于计算机的飞速发展,直接对大尺度运动进行动力学研究是完全可能的。

参 考 文 献

[1] J.Qian(钱俭),Cascade Model of Turbulence, *Phys.Fluids*, **31** (1988), 2865.

[2] J.Qian (钱俭), Numerical Experiments on onedimensional Model of Turbulence, *Phys.Fluids*, **27** (1984), 1975.

[3] 钱 俭,湍流的封闭性问题和非平衡统计力学,力学与实践, **10**(1988), 1.

CHAOS, TURBULENCE AND NONEQUILIBRIUM STATISTICAL MECHANICS

Qian Jian

(Graduate School of Academia Sinica)

Abstract

In order to bridge the gap between a fully-developed turbulence and a simple nonlinear dynamic system with a few degrees of freedom studied in the theory of chaos and strange attractors, a low-order dynamic system with a dimension of 20 is proposed to simulate the following basic features of fully-developed turbulence: dynamically exhibiting the deterministic chaos and statistically demonstrating the Kolmogorov phenomenology (energy cascade, $-5/3$ law, and so on). A fully-developed turbulence is a complicated "large system" with a dimension of more than 10^{10}. AS it is meaningless and impossible to make detailed description of the geometric structure and dynamic behavior of its strange attractor, its statistical study is necessary. The central problem of the statistical theory of turbulence is the closure problem due to the nonlinearity of the Navier-Stokes equation. The nonequilibrium statistical mechanics has been applied to solve the closure problem and to study the statistical properties of isotropic turbulence.